INSTYTUT MEDICUS
Kurs przygotowawczy do matury
i rekrutacji na studia medyczne
Rok szkolny 2020 / 2021

www.medicus.edu.pl
tel. 501 383 955

MATEMATYKA 9

FUNKCJE WYKŁADNICZE, LOGARYTMY

Dla dowolnej liczby $a > 0$, liczby naturalnej $n > 1$ i liczby całkowitej m definiujemy działanie potęgowania z wykładnikiem wymiernym:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Własności działań na potęgach dla $a, b \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ i $x, y \in \mathbf{W}$:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x \qquad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

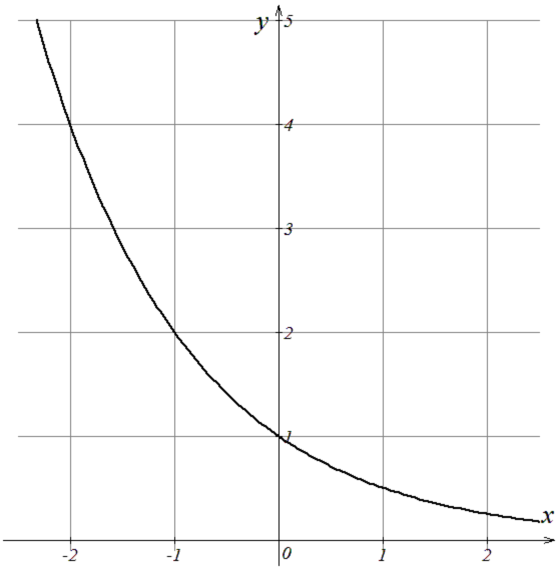
$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

Powyższe wzory dla $a, b \in (0, \infty)$ są prawdziwe również wtedy, gdy wykładnik należy do zbioru liczb niewymiernych (czyli możemy przyjąć, że są one prawdziwe dla dowolnych $x, y \in \mathbf{R}$).

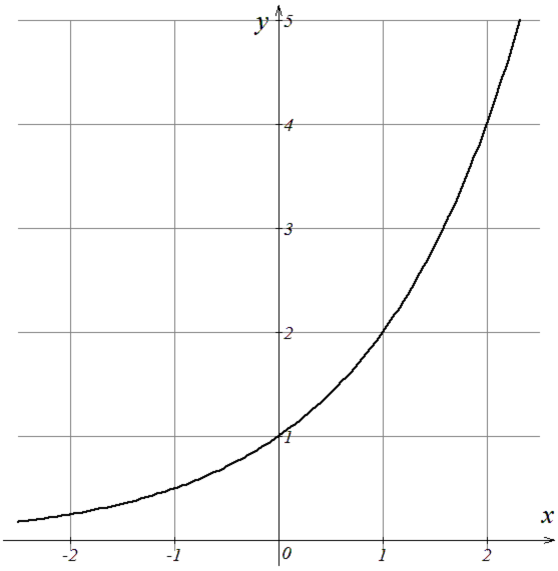
Stosując powyższe wzory możemy obliczać takie wyrażenia, jak na przykład π^π, gdzie liczba niewymierna $\pi \cong 3{,}141593\ldots$. Oczywiście, wynik takiego działania również należy do zbioru liczb niewymiernych. W niektórych przypadkach, korzystając ze wzorów działań na potęgach, możemy otrzymać wynik będący liczbą wymierną, np.

$$\left[\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2\,.$$

Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję zapisaną w postaci $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, określoną dla $x \in \mathbf{R}$. Dziedziną funkcji wykładniczej jest zbiór liczb rzeczywistych, a jej zbiorem wartości jest przedział $(0, \infty)$. Monotoniczność funkcji wykładniczej zależy od a.



$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

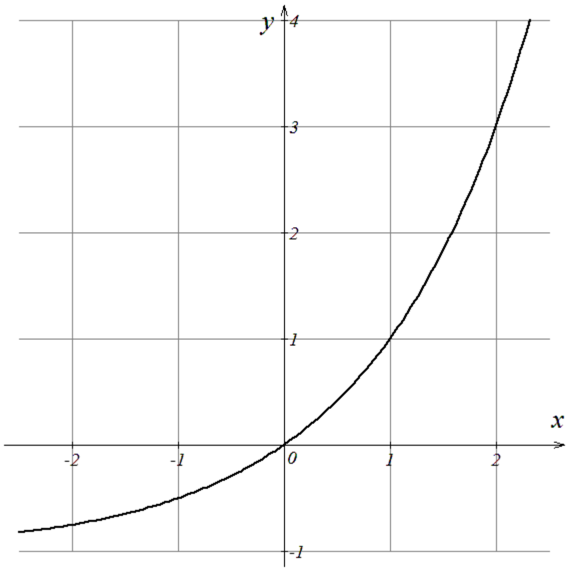


$f(x) = 2^x$

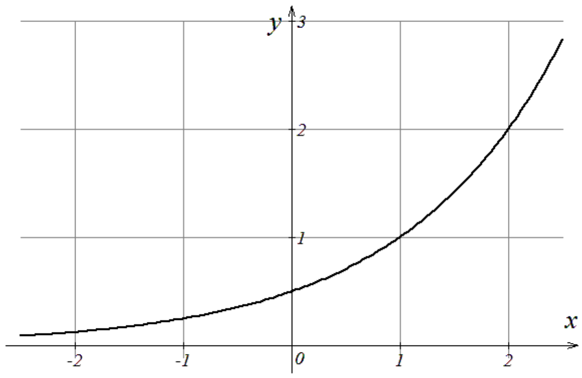
Dla $a \in (0, 1)$ funkcja wykładnicza jest malejąca, dla $a \in (1, \infty)$ funkcja ta jest rosnąca. Wykres funkcji wykładniczej przecina oś OY w punkcie $(0, 1)$, a oś OX jest jego asymptotą.

W definicji funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ przyjmujemy, że $a \neq 1$, gdyż $f(x) = 1^x = 1$ jest funkcją stałą.

Wykres funkcji $f(x) = 2^x - 1$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = 2^x$ o jedną jednostkę w dół.
Asymptotą poziomą tego wykresu jest funkcja
$f(x) = -1$.



Wykres funkcji $f(x) = 2^{x-1}$ otrzymujemy Przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = 2^x$ o jedną jednostkę w prawo.



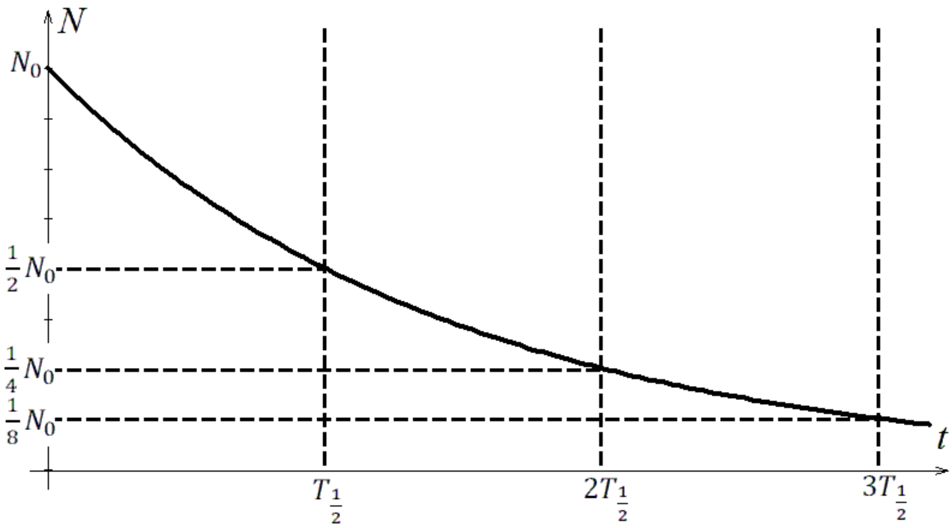
W opisie wielu zagadnień stosuje się funkcję wykładniczą $f(x) = e^x$, w której $e \cong 2{,}718282$ ... jest liczbą niewymierną (liczba ta jest podstawą tzw. logarytmów naturalnych).

Przykład zastosowania funkcji wykładniczej.

W przyrodzie występują pierwiastki promieniotwórcze, których jądra samorzutnie rozpadają się. Zgodnie z *prawem rozpadu* liczba jąder rozpadających się maleje wykładniczo.

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

N_0 oznacza pierwotną liczbę jąder, N to liczba jąder, które nie uległy rozpadowi po czasie t, a λ to stała rozpadu charakteryzująca prawdopodobieństwo rozpadu pojedynczego jądra atomowego w jednostce czasu. Okres połowicznego rozpadu $T_{\frac{1}{2}}$ jest to średni czas, po którym połowa pierwotnej liczby jąder atomowych ulega rozpadowi. Po czasie dwukrotnie dłuższym, czyli $2T_{\frac{1}{2}}$, z pierwotnej liczby jąder N_0 pozostaje $\frac{1}{4}N_0$, a po czasie $3T_{\frac{1}{2}}$ pozostaje $\frac{1}{8}N_0$ jąder, które jeszcze nie uległy rozpadowi. Zależność tą ilustruje poniższy wykres.



Wzór $m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ opisuje zależność masy próbki izotopu promieniotwórczego od czasu t, dla próbki o początkowej masie m_0 i okresie połowicznego rozpadu T, a wzór $N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ opisuje liczbę jąder, które nie uległy rozpadowi po czasie t.

Logarytmem liczby b ($b \in \mathbf{R}_+$) przy podstawie a ($a \in \mathbf{R}_+$ i $a \neq 1$) nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść podstawę logarytmu a, aby otrzymać liczbą logarytmowaną b.

$$\log_a b = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = b$$

Z definicji logarytmu i własności działań na potęgach wynikają podane niżej zależności.

Dla $a, b > 0$ i $a \neq 1$ zachodzi:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a(a^x) = x$$

$$a^{\log_a b} = b$$

Logarytmem dziesiętnym nazywamy logarytm o podstawie 10. Zapisujemy go w postaci $\log_{10} x$ lub w krótszej formie $\log x$. Na przykład $\log_{10} 10 = \log 10 = 1$, $\log 1000 = \log(10^3) = 3$.

Logarytmem naturalnym nazywamy logarytm o podstawie $e \cong 2{,}718282 \ldots$.

Zapisujemy go w postaci $\log_e x$ lub w krótszej formie $\ln x$.

Dla $x, y > 0$ i $a > 0, a \neq 1, c \in \mathbf{R}$ określone są następujące własności logarytmów:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a(x^c) = c \log_a x$$

Przykład zastosowania logarytmów.

Próg słyszalności dla ludzkiego ucha wynosi $I_0 \cong 10^{-12}\ \frac{W}{m^2}$. Natężenie dźwięku można mierzyć, porównując je z natężeniem progu słyszalności. Poziom głośności dźwięku o natężeniu I wyraża się w decybelach (oznaczenie dB)

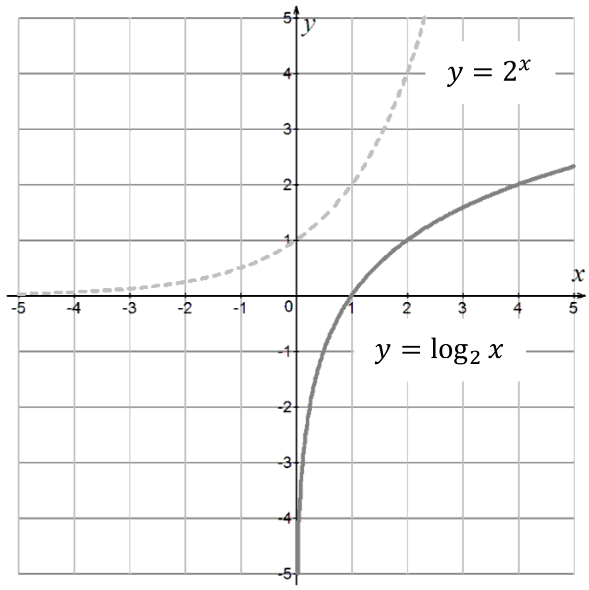
$$L = 10 \cdot \log\frac{I}{I_0}\ [\mathrm{dB}]\ .$$

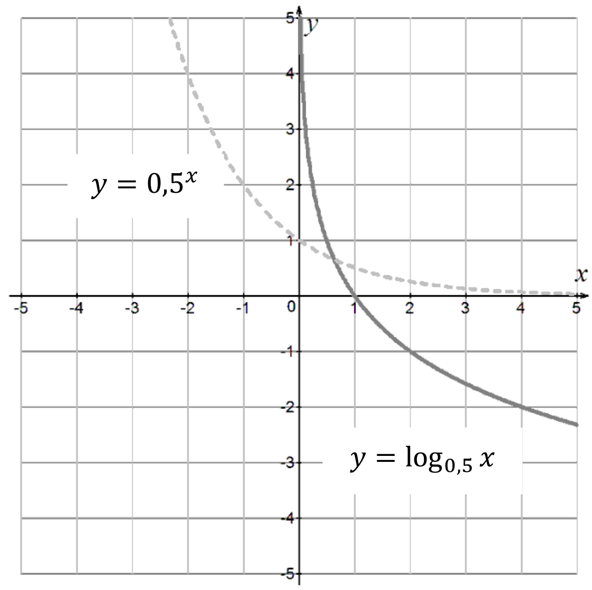
Np. poziom głośności o natężeniu $I \approx 10^{-1}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ występujący na koncercie rockowym jest równy:

$$L = 10 \cdot \log\frac{10^{-1}\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right]}{10^{-12}\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right]}\ [\mathrm{dB}] = 10 \cdot \log\frac{10^{-1}}{10^{-12}}\ [\mathrm{dB}] = 10 \cdot \log(10^{11})\ [\mathrm{dB}] = 110\ [\mathrm{dB}].$$

Poziom rozszerzony

Wykres funkcji wykładniczej $y = a^x$ i wykres funkcji logarytmicznej $y = \log_a x$.





Na powyższych wykresach przedstawiono przykłady funkcji wykładniczej (linia przerywana) oraz funkcji logarytmicznej (linia ciągła). Dziedziną funkcji logarytmicznej jest zbiór $\mathbf{R}_+$, miejscem zerowym jest $x = 1$; dla podstawy logarytmu $a > 1$ funkcja ta jest rosnąca, a dla podstawy logarytmu $0 < a < 1$ funkcja ta jest malejąca.

Twierdzenie o zmianie podstawy logarytmu.

Jeśli $a, b, x > 0$ oraz $a \neq 1$ i $b \neq 1$, to $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$.

Korzystając z twierdzenia o zmianie podstawy logarytmu można udowodnić, że jeśli $a, b > 0$ oraz $a \neq 1$ i $b \neq 1$, to $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$.

Pochodna funkcji wykładniczej i logarytmicznej

Pochodna funkcji wykładniczej (której podstawa $a > 0$ oraz $a \neq 1$)

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a$$

w szczególności dla liczby niewymiernej e zachodzi $(e^x)' = e^x$.

Pochodna funkcji logarytmicznej (której podstawa $a > 0$ i $a \neq 1$) dla $x > 0$.

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Pochodna funkcji logarytmicznej przy podstawie e (logarytmu naturalnego): $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

ZADANIA

9.1. (3 punkty)

Wykaż, że liczba 3^{54} jest rozwiązaniem równania $243^{11} - 81^{14} + 7x = 9^{27}$.

9.2. (4 punkty)

Rozwiąż równanie $4^{23}x - 32^9x = 16^4 \cdot (4^4)^4$.

Zapisz rozwiązanie tego równania w postaci 2^k, gdzie k jest liczbą całkowitą.

9.3. (2 punkty)

Dla jakich wartości a i b do wykresu funkcji $y = a^x + b$ należą punkty P i M ?

$$P = \left(0, \tfrac{1}{2}\right), \quad M = (-1, -0{,}3)$$

9.4. (2 punkty)

Podaj równanie asymptoty i współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji $y = 9^x - 27$ z osiami układu współrzędnych.

9.5. (2 punkty)

Sprawdź, czy równanie $3^{x+2} - 2 \cdot 3^x = 63$ ma rozwiązanie będące liczbą całkowitą.

9.6. (2 punkty)

Oblicz, dla jakiego argumentu funkcja $f(x) = 3^x$ przyjmuje wartość 6.

9.7. (4 punkty)

Znajdź dziedzinę funkcji f określonej wzorem $f(x) = 4 + \log_{(x^2+x-2)}(x^2 - 6x + 34)$.

9.8. (4 punkty)

Rozwiąż nierówność $2^{2x} - 2^x - 2 > 0$.

9.9. (1 punkt)

Oblicz wartość wyrażenia $\log 100 - \log_2 8$.

9.10. (3 punkty)

Dla jakich wartości a i b do wykresu funkcji $y = a + b\log_2 x$ należą punkty P i M ?

$$P = \left(\tfrac{1}{2}, 4\right), \quad M = (4, 1)$$

9.11. (3 punkty)

Ludność pewnego kraju wzrasta zgodnie z modelem wykładniczym i podwaja się co 30 lat. O ile procent rocznie rośnie liczba ludności tego kraju?

9.12. (2 punkty)

Skala Richtera służy do określania siły trzęsień ziemi. Siła ta opisana jest wzorem

$$R = \log \frac{A}{A_0}\text{, gdzie}$$

A oznacza amplitudę trzęsienia wyrażoną w centymetrach,

$A_0 = 10^{-4}$ cm jest stałą, nazywaną amplitudą wzorcową.

5 maja 2014 roku w Tajlandii miało miejsce trzęsienie ziemi o sile 6,2 w skali Richtera. Oblicz amplitudę trzęsienia ziemi w Tajlandii i rozstrzygnij, czy jest ona większa, czy – mniejsza od 100 cm.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

9.13. (1 punkt)

Liczba $\log_{\sqrt{2}} 2$ jest równa

a) 2 b) 4 c) $\sqrt{2}$ d) $\frac{1}{2}$

9.14. (1 punkt)

Liczba $\log_{\sqrt{2}}\left(2\sqrt{2}\right)$ jest równa

a) $\frac{3}{2}$ b) 2 c) $\frac{5}{2}$ d) 3

9.15. (1 punkt)

Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = 3^x$.

Funkcja $g(x) = 3^x + 3$ z prostą o równaniu $y = 3$

a) nie ma punktów wspólnych;

b) ma jeden punkt wspólny;

c) ma dwa punkty wspólne;

d) ma nieskończenie wiele punktów wspólnych.

9.16. (1 punkt)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 4^{-x} + 1$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

Liczba $f\left(\frac{1}{2}\right)$ jest równa:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{2}$ c) 3 d) 17

9.17. (1 punkt)

Iloraz $32^{-3} : \left(\frac{1}{8}\right)^4$ jest równy

a) 2^{-27} b) 2^{-3} c) 2^{3} d) 2^{27}

9.18. (1 punkt)

Liczba $\log 24$ jest równa

a) $2\log 2 + \log 20$

b) $\log 6 + 2\log 2$

c) $2\log 6 - \log 12$

d) $\log 30 - \log 6$

9.19. (1 punkt)

Liczba $\log_5 \sqrt{125}$ jest równa

a) $\frac{2}{3}$ b) 2 c) 3 d) $\frac{3}{2}$

9.20. (1 punkt)

Wiadomo, że $\log_{32} c = 0{,}4$. Zatem liczba c jest

a) wymierna b) niewymierna c) $c < 4$ d) $c > 4$

9.21. (1 punkt)

Liczba $\frac{\log_6 27}{\log_6 9}$ jest równa

a) 6 b) 3 c) 2 d) $1{,}5$

9.22. (1 punkt)

Liczba $\log_5 1000$ jest mniejsza od liczby $\log_5 10000$

a) o 90% b) o 50% c) o 25% d) o 10%

9.23. (1 punkt)

Wyrażenie $\log_4(2x - 1)$ jest określone dla wszystkich liczb x spełniających warunek

a) $x \le \frac{1}{2}$ b) $x > \frac{1}{2}$ c) $x \le 0$ d) $x > 0$

9.24. (1 punkt)

Dane są liczby $a = -\frac{1}{27}$, $b = \log_{\frac{1}{4}} 64$, $c = \log_{\frac{1}{3}} 27$. Iloczyn abc jest równy

a) -9 b) $-\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) 3

9.25. (1 punkt)

Liczba $2\log_5 10 - \log_5 4$ jest równa

a) 2 b) $\log_5 96$ c) $2\log_5 6$ d) 5

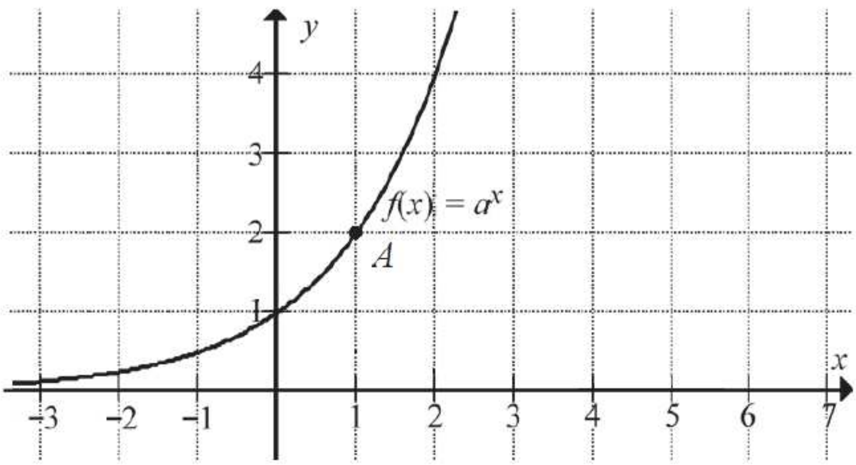
9.26. (1 punkt)

Liczba $2\log_2 3 - 2\log_2 5$ jest równa

a) $\log_2 \frac{9}{25}$ b) $\log_2 \frac{3}{5}$ c) $\log_2 \frac{9}{5}$ d) $\log_2 \frac{6}{25}$

9.27. (1 punkt)

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji wykładniczej f określonej wzorem $f(x) = a^x$. Punkt $A = (1, 2)$ należy do tego wykresu funkcji.



Podstawa a potęgi jest równa

a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) -2 d) 2

Poziom rozszerzony

9.28.R (5 punktów)

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \log_{x^2-3}(x^3 + 4x^2 - x - 4)$ i zapisz ją w postaci sumy przedziałów liczbowych.

9.29.R (5 punktów)

Rozwiąż nierówność $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 1) + \log_{\frac{1}{3}}(5 - x) > \log_{\frac{1}{3}}\big(3(x + 1)\big)$.

9.30.R (3 punkty)

Rozwiąż równanie $\log_5(\log_4(\log_2 x)) = 0$.

9.31.R (3 punkty)

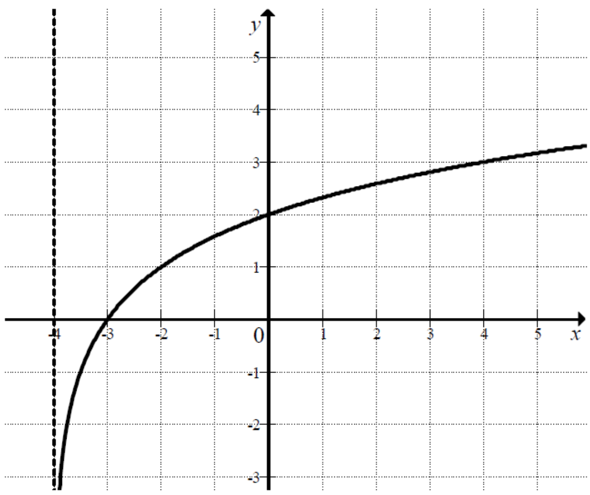
Rozwiąż nierówność $(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 2 \geq 0$, gdzie $x > 0$.

9.32.R (3 punkty)

Dla jakich wartości parametrów m i n wzory $y = 1 - \log_3 x$ i $y = \log(mx)^n$ opisują tę samą funkcję ?

9.33.R (3 punkty)

Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji logarytmicznej f określonej wzorem $f(x) = \log_2(x - p)$.



a) Podaj wartość p.

b) Narysuj wykres funkcji określonej wzorem $y = |f(x)|$.

c) Podaj wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $|f(x)| = m$ ma dwa rozwiązania o przeciwnych znakach.

9.34.R (2 punkty)

Oblicz $\log_3 \sqrt[4]{27} - \log_3\left(\log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}\right)$.

Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

9.35.R (1 punkt)

Wartość wyrażenia $2\log_5 10 - \frac{1}{\log_{20} 5}$ jest równa

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2

9.36.R (1 punkt)

Dla dowolnych liczb $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$, $y \neq 1$ wartość wyrażenia $\left(\log_{\frac{1}{x}} y\right) \cdot \left(\log_{\frac{1}{y}} x\right)$ jest równa

a) $x \cdot y$ b) $\frac{1}{x \cdot y}$ c) -1 d) 1

MATEMATYKA 9
Odpowiedzi do zadań

Rozwiązania zadań do przygotowania na zajęcia 9.	
zadanie	rozwiązanie
8D.1. Z2GW, 640b5, s.113	$3\frac{1}{3}$
8D.2. Z2GW, 648a, s.114	$\frac{1}{9}$
8D.3. Z2GW, 667d, s.117	2
8D.4. Z2GW, 697a, s.122	$D = (\frac{1}{4}, \infty)\backslash\{1\}$
8DR.5 CKE 2009pr, 6, s. 8	$D_f = \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$
8DR.6 CKE 2008pr, 9, s. 12	$D_f = (0{,}8)$. Najmniejszą wartość funkcja $f(x) = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(8x - x^2)$ przyjmuje dla argumentu $x = 4$ i wartość ta jest równa $f(4) = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(16) = -8$.
8DR.7 CKE 2015pr s, 1, s. 2	$\log_x(xy) \cdot \log_y\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\log_y(xy)}{\log_y(x)} \cdot \frac{\log_x\left(\frac{y}{x}\right)}{\log_x(y)} = \frac{\log_y(xy)}{\log_y(x)} \cdot \frac{\log_x\left(\frac{y}{x}\right)}{\frac{1}{\log_y(x)}} = \log_y(xy) \cdot \log_x\left(\frac{y}{x}\right)$

Funkcje Wykładnicze, Logarytmy	
zadanie	rozwiązanie
9.1. CKE, 2009, 4	$x = 3^{54}$
9.2. CKE, 2008, 3	$x = 2^3$
9.3. Z2GW, 689a, s. 120	$a = 5,\ b = -\frac{1}{2}$
9.4. Z2GW, 688a, s. 120	Równanie asymptoty $y = -27$; punkty przecięcia: $(0, -26), \left(\frac{3}{2}, 0\right)$.
9.5. P2NE, 8a, s. 240	$x = 2$
9.6. CKE od 2015, 5, s. 2	$x = \log_3 6$
9.7. Vad. Matura 2015, Wyd. OPERON, 11, s. 84	$\begin{cases} x^2 - 6x + 34 > 0 \\ x^2 + x - 2 > 0 \\ x^2 + x - 2 \neq 1 \end{cases}$ $D_f = \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, -2\right) \cup \left(1, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}, \infty\right)$
9.8. P2NE, 17c, s. 241	$x \in (1, \infty)$
9.9. CKE 2013, 3, s. 2	$\log 100 - \log_2 8 = -1$
9.10. Z2GW, 702a, s. 122	$a = 3,\ b = -1$
9.11. Z2GW, 749, s. 130	O około 2,3 %.
9.12. CKE 2016, 31, s. 17	$A = 10^{2,2} > 10^2 = 100$. Amplituda trzęsienia ziemi była większa od 100 cm.

9.13. CKE 2019, 1, s. 2	a) 2
9.14. CKE 2016, 2, s. 2	d) 3
9.15. R2K1, 906, s.125	a) nie ma punktów wspólnych
9.16. CKE 2020, 12, s. 6	b) $\frac{3}{2}$
9.17. CKE, 2009 próbna, 4	b) 2^{-3}
9.18. CKE, inf. 2010 , 3, s. 75	b) $\log 6 + 2\log 2$
9.19. CKE 2020, 3, s. 2	d) $\frac{3}{2}$
9.20. R2K1, 908, s. 125	a) wymierna
9.21. R2K1, 912, s. 125	d) 1,5
9.22. R2K1, 915, s. 125	c) o 25%
9.23. CKE 2011, 8, s. 4	b) $x > \frac{1}{2}$
9.24. CKE 2015n, 2, s. 2	b) $-\frac{1}{3}$
9.25. CKE 2015s, 4, s. 2	a) 2
9.26. CKE 2017, 3, s. 2	a) $\log_2 \frac{9}{25}$
9.27. CKE 2017, 11, s. 6	d) 2

9.28.R CKE 2005pr, 11, s. 2	$D_f = (-4,-2) \cup \left(-2,-\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3},2\right) \cup (2,\infty)$
9.29.R CKE 2007pr, 2, s. 3	$x \in (1,2) \cup (4,5)$
9.30.R CKE INF 2008, 12, s. 23	$x = 16$
9.31.R P3NE, P5, s. 144	$x \in \left(0,\frac{1}{2}\right\rangle \cup \langle 4,\infty)$
9.32.R Z2GW, 701b, s. 122	$m = \frac{1}{3}, n = -\log_3 10$
9.33. R CKE 2013pr, 12, s. 18	(a) $p = -4$, (b) Aby otrzymać wykres funkcji $y = \lvert f(x)\rvert$, należy część wykresu funkcji f leżącą pod osią OX odbić symetrycznie względem tej osi, a pozostałą część wykresu pozostawić bez zmian. (c) $m > 2$.
9.34.R CKE od 2015pr, 9, s. 5	$\log_3 \sqrt[4]{27} - \log_3\left(\log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}\right) = 2{,}75$, zakodowane cyfry to $[2 \vert 7 \vert 5]$
9.35.R CKE 2018pr, 3, s. 2	$2\log_5 10 - \frac{1}{\log_{20} 5} = \log_5 10^2 - \log_5 20 = 1$, odpowiedź (c)
9.36.R CKE 2019pr, 1, s. 2	Twierdzenie o zmianie podstawy logarytmu, odpowiedź (d).

Zagadnienia – zajęcia 10

Ciągi

- wzór ogólny ciągu, monotoniczność ciągu
- ciąg arytmetyczny, ciąg geometryczny
- szereg geometryczny

poziom rozszerzony

- ciągi określone rekurencyjnie
- ciągi zbieżne

Zadania do rozwiązania w domu

9D.1. Średnia arytmetyczna liczb: 3, 1, 1, 0, x, 0 jest równa 2. Oblicz x.

9D.2. Liczby $2, x-3, 8$ są w podanej kolejności pierwszym, drugim i czwartym wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz x.

9D.3. Liczby a, b, c tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny. Suma tych liczb jest równa 93. Te same liczby, w podanej kolejności są pierwszym, drugim i siódmym wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz a, b i c.

9D.4. Wyznacz wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego wiedząc, że suma pierwszych pięciu jego wyrazów jest równa 10, a wyrazy trzeci, piąty i trzynasty tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny.

9DR.5 Dany jest ciąg (a_n), gdzie $a_n = \frac{5n+6}{10(n+1)}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

a) Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n).
b) Podaj największą liczbę a i najmniejszą liczbę b takie, że dla każdego n spełniony jest warunek: $a \leq a_n \leq b$.

9DR.6 Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) wyrażona została wzorem $S_n = 2n^2 + n$ dla $n \geq 1$. Oblicz sumę 50 początkowych wyrazów tego ciągu o numerach parzystych, czyli $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100}$.

9DR.7 Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem $a_n = \left(\frac{1}{2x-371}\right)^n$ dla $n \geq 1$. Wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie. Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą x, dla której nieskończony szereg $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ jest zbieżny.