INSTITUT MEDICUS
Kurs przygotowawczy do matury
i rekrutacji na studia medyczne
Rok 2017/2018

www.medicus.edu.pl
tel. 501 38 39 55

MATEMATYKA 9

FUNKCJE WYKŁADNICZE, LOGARYTMY

Dla dowolnej liczby $a > 0$, liczby naturalnej $n > 1$ i liczby całkowitej m definiujemy działanie potęgowania z wykładnikiem wymiernym:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Własności działań na potęgach dla $a, b \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ i $x, y \in \mathbf{W}$:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x \qquad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

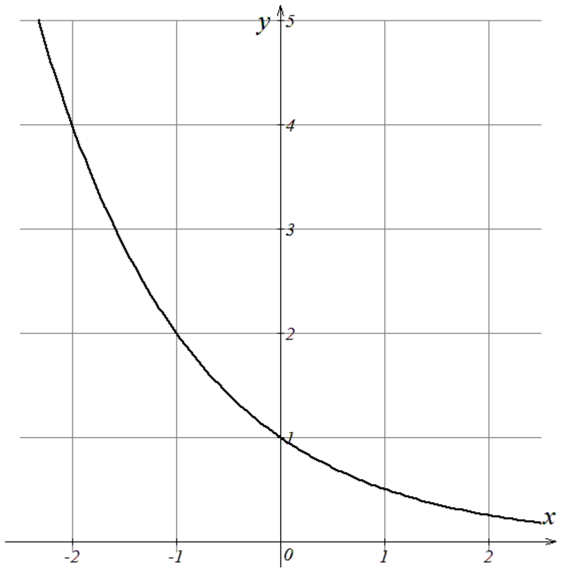
$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

Powyższe wzory dla $a, b \in (0, \infty)$ są prawdziwe również wtedy, gdy wykładnik należy do zbioru liczb niewymiernych (czyli możemy przyjąć, że są one prawdziwe dla dowolnych $x, y \in \mathbf{R}$).

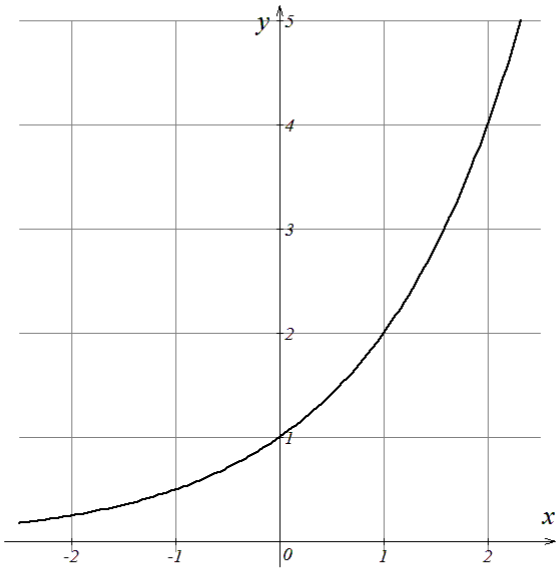
Stosując powyższe wzory możemy obliczać takie wyrażenia, jak na przykład π^π, gdzie liczba niewymierna $\pi \cong 3{,}141593 \ldots$. Oczywiście, wynik takiego działania również należy do zbioru liczb niewymiernych. W niektórych przypadkach, korzystając ze wzorów działań na potęgach, możemy otrzymać wynik będący liczbą wymierną, np.

$$\left[\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2\,.$$

Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję zapisaną w postaci $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, określoną dla $x \in \mathbf{R}$. Dziedziną funkcji wykładniczej jest zbiór liczb rzeczywistych, a jej zbiorem wartości jest przedział $(0, \infty)$. Monotoniczność funkcji wykładniczej zależy od a.



$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



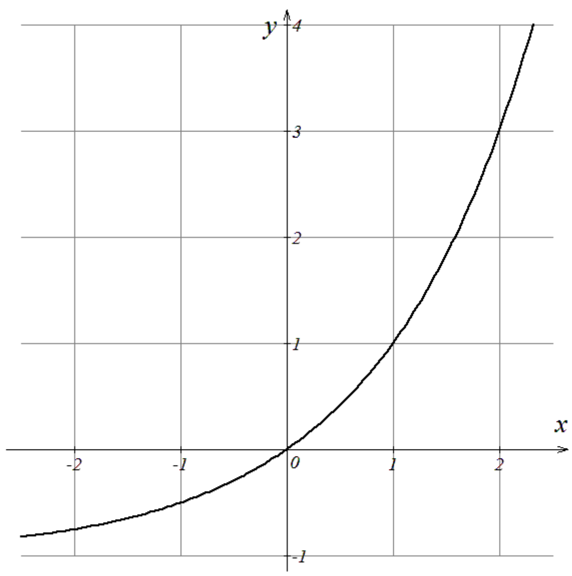
$f(x) = 2^x$

Dla $a \in (0, 1)$ funkcja wykładnicza jest malejąca, dla $a \in (1, \infty)$ funkcja ta jest rosnąca. Wykres funkcji wykładniczej przecina oś OY w punkcie $(0, 1)$, a oś OX jest jego asymptotą.

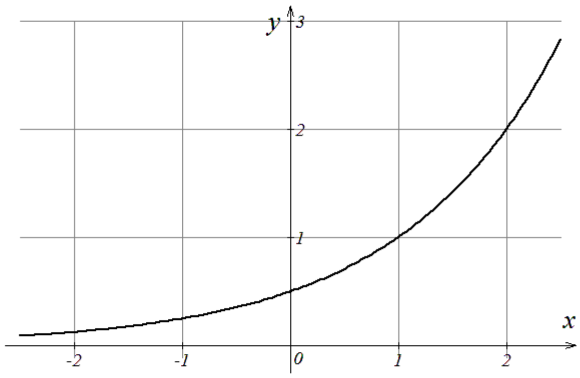
W definicji funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ przyjmujemy, że $a \neq 1$, gdyż $f(x) = 1^x = 1$ jest funkcją stałą.

Wykres funkcji $f(x) = 2^x - 1$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = 2^x$ o jedną jednostkę w dół.
Asymptotą poziomą tego wykresu jest funkcja

$$f(x) = -1.$$



Wykres funkcji $f(x) = 2^{x-1}$ otrzymujemy Przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = 2^{x}$ o jedną jednostkę w prawo.



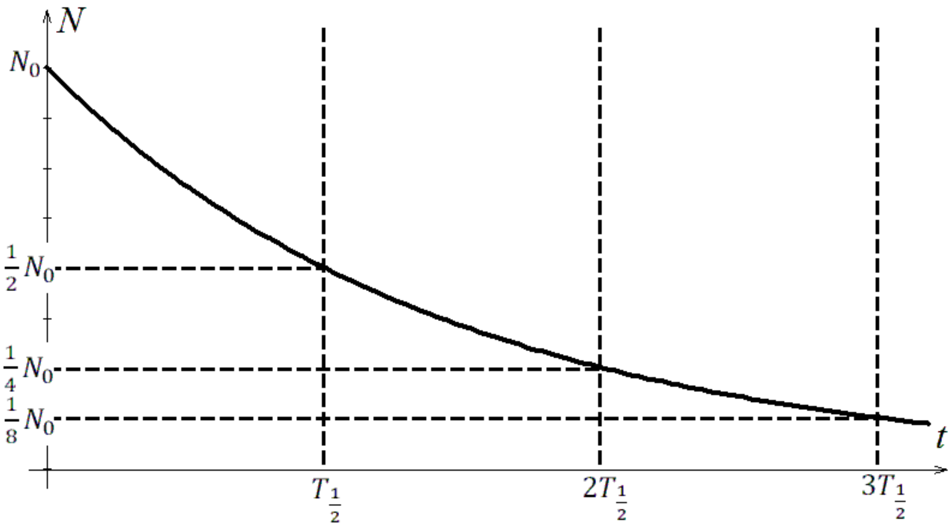
W opisie wielu zagadnień stosuje się funkcję wykładniczą $f(x) = e^{x}$, w której $e \cong 2{,}718282$ ... jest liczbą niewymierną (liczba ta jest podstawą tzw. logarytmów naturalnych).

Przykład zastosowania funkcji wykładniczej.

W przyrodzie występują pierwiastki promieniotwórcze, których jądra samorzutnie rozpadają się. Zgodnie z *prawem rozpadu* liczba jąder rozpadających się maleje wykładniczo.

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

N_0 oznacza pierwotną liczbę jąder, N to liczba jąder, które nie uległy rozpadowi po czasie t, a λ to stała rozpadu charakteryzująca prawdopodobieństwo rozpadu pojedynczego jądra atomowego w jednostce czasu. Okres połowicznego rozpadu $T_{\frac{1}{2}}$ jest to średni czas, po którym połowa pierwotnej liczby jąder atomowych ulega rozpadowi. Po czasie dwukrotnie dłuższym, czyli $2T_{\frac{1}{2}}$, z pierwotnej liczby jąder N_0 pozostaje $\frac{1}{4}N_0$, a po czasie $3T_{\frac{1}{2}}$ pozostaje $\frac{1}{8}N_0$ jąder, które jeszcze nie uległy rozpadowi. Zależność tą ilustruje poniższy wykres.



Wzór $m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ opisuje zależność masy próbki izotopu promieniotwórczego od czasu t, dla próbki o początkowej masie m_0 i okresie połowicznego rozpadu T, a wzór $N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ opisuje liczbę jąder, które nie uległy rozpadowi po czasie t.

Logarytmem liczby b ($b \in \mathbf{R}_+$) przy podstawie a ($a \in \mathbf{R}_+$ i $a \neq 1$) nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść podstawę logarytmu a, aby otrzymać liczbą logarytmowaną b.

$$\log_a b = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = b$$

Z definicji logarytmu i własności działań na potęgach wynikają podane niżej zależności.
Dla $a, b > 0$ i $a \neq 1$ zachodzi:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a{=}1$$

$$\log_a(a^x) = x$$

$$a^{\log_a b} = b$$

Logarytmem dziesiętnym nazywamy logarytm o podstawie 10. Zapisujemy go w postaci $\log_{10} x$ lub w krótszej formie $\log x$. Na przykład $\log_{10} 10 = \log 10 = 1$, $\log 1000 = \log(10^3) = 3$.

Logarytmem naturalnym nazywamy logarytm o podstawie $e \cong 2{,}718282 \ldots$.
Zapisujemy go w postaci $\log_e x$ lub w krótszej formie $\ln x$.

Dla $x, y > 0$ i $a > 0, a \neq 1, c \in \mathbf{R}$ określone są następujące własności logarytmów:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a(x^c) = c \log_a x$$

Przykład zastosowania logarytmów.

Próg słyszalności dla ludzkiego ucha wynosi $I_0 \cong 10^{-12}\ \frac{W}{m^2}$. Natężenie dźwięku można mierzyć, porównując je z natężeniem progu słyszalności. Poziom głośności dźwięku o natężeniu I wyraża się w decybelach (oznaczenie dB)

$$L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}\ [\mathrm{dB}]\ .$$

Np. poziom głośności o natężeniu $I \approx 10^{-1}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ występujący na koncercie rockowym jest równy:

$$L = 10 \cdot \log \frac{10^{-1} \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right]}{10^{-12} \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right]}\ [\mathrm{dB}] = 10 \cdot \log \frac{10^{-1}}{10^{-12}}\ [\mathrm{dB}] = 10 \cdot \log(10^{11})\ [\mathrm{dB}] = 110\ [\mathrm{dB}].$$

Koniec darmowego fragmentu ☺

W dalszej części konspektu znajdują się:

- zadania spełniające aktualne wymagania maturalne
- klucze rozwiązań
- zakres materiału na następne zajęcia

Zapraszamy na kurs!

Szczegółowe informacje na temat naszego kursu przygotowawczego znajdują się na stronie: www.medicus.edu.pl

Zapisy są przyjmowane przez formularz zgłoszeniowy: www.medicus.edu.pl/zapisy