INSTYTUT MEDICUS
Kurs przygotowawczy do matury
i rekrutacji na studia medyczne
Rok 2017/2018

www.medicus.edu.pl
tel. 501 38 39 55

MATEMATYKA 8

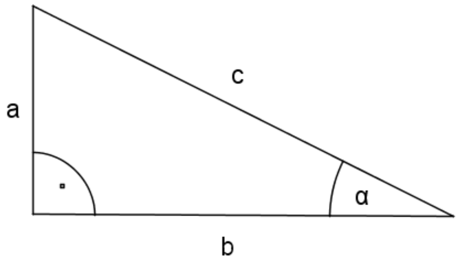
FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE.

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego $(\alpha < 90°)$**.**

Stosunki długości boków trójkąta prostokątnego nazywamy *funkcjami trygonometrycznymi*.

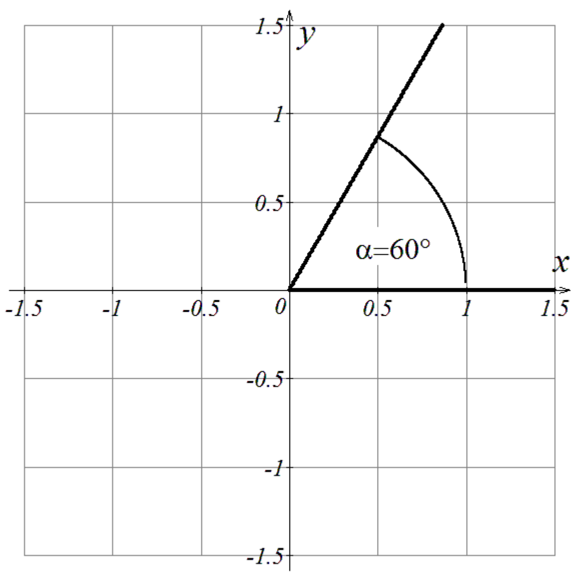
$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\qquad$ $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$

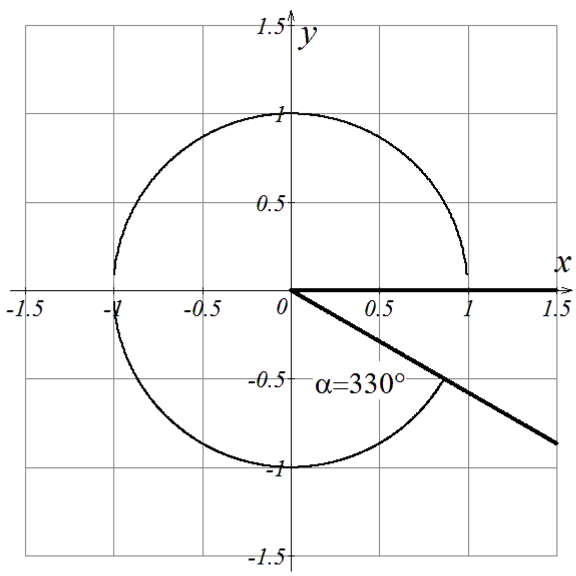
$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\qquad$ $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}$



Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta.

- Wierzchołek kąta umieszczamy w początku układu współrzędnych.
- Jedno z ramion kąta (nazywane *ramieniem początkowym*) zawiera się w dodatniej półosi *OX*.
- Drugie ramię kąta nazywane jest *ramieniem końcowym*.
- Kąt odłożony jest od ramienia początkowego do ramienia końcowego w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.





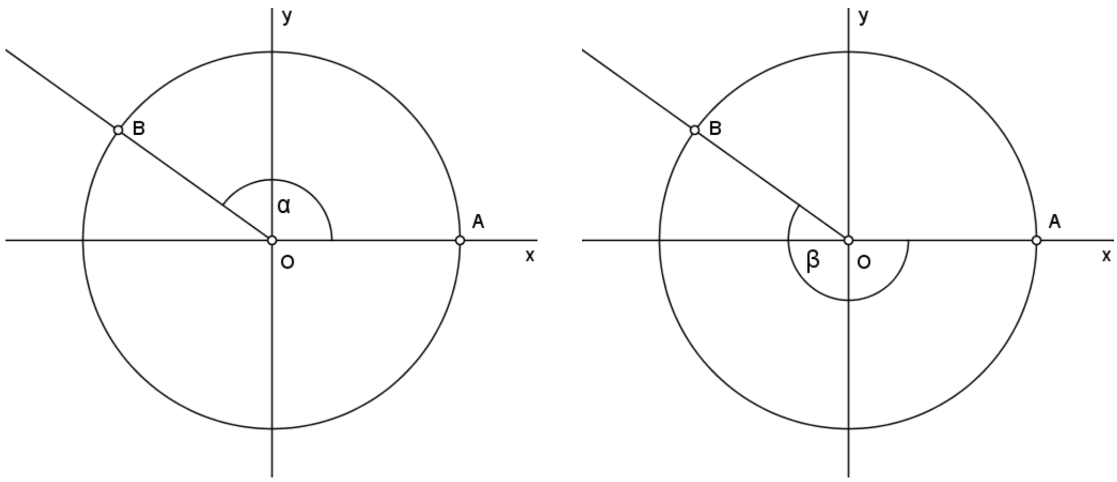
Jeżeli punkt $P = (x, y)$ jest dowolnym punktem leżącym na ramieniu końcowym kąta α, różnym od początku układu współrzędnych, to podane niżej wzory służą do zdefiniowania funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta $\alpha \in \langle 0°, 360° \rangle$.

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \ \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \text{gdzie } r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} \qquad \text{dla } x \neq 0$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}^{-1}\alpha = \frac{x}{y} \qquad \text{dla } y \neq 0$$

Kątem obrotu *AOB* nazywamy kąt, o jaki należy obrócić ramię początkowe (półprosta *OA*, pokrywająca się z dodatnią półosią *OX*) wokół punktu *O*, aby pokryło się ono z ramieniem końcowym (półprosta *OB*).



Przyjmuje się, że

- dodatni kierunek obrotu jest kierunkiem przeciwnym do ruchu wskazówek zegara,
- ujemny kierunek obrotu jest kierunkiem zgodnym z ruchem wskazówek zegara.

Podane definicje funkcji trygonometrycznych można uogólnić na dowolny kąt $\alpha + k \cdot 360°$, gdzie $\alpha \in \langle 0°, 360°)$ oraz $k \in \mathbf{C}$. Definiujemy wtedy:

$$\sin(\alpha + k \cdot 360°) = \sin\alpha ,$$

$$\cos(\alpha + k \cdot 360°) = \cos\alpha .$$

Jeżeli tangens kąta α jest określony, to definiujemy

$$\operatorname{tg}(\alpha + k \cdot 360°) = \operatorname{tg}\alpha .$$

Jeżeli cotangens kąta α jest określony, to definiujemy

$$\operatorname{ctg}(\alpha + k \cdot 360°) = \operatorname{ctg}\alpha .$$

Miarę kąta wyrażamy w stopniach. Jednostką miary stopniowej jest 1° będący $\frac{1}{360}$ kąta pełnego.

Gdy potrzebujemy większej dokładności, posługujemy się

- minutami – jeden stopień to 60 minut ($1° = 60'$),
- sekundami – jedna minuta to 60 sekund ($1' = 60''$).

Miarę w stopniach możemy łatwo przeliczyć na tak zwaną *miarę łukową*.
Jednostką miary łukowej jest 1 radian („rad" albo zwyczajowo pomijamy nazwę jednostki).
W mierze łukowej kąt pełny to 2π radianów, kąt półpełny to π, a kąt prosty to $\frac{\pi}{2}$ radianów.
Wartości funkcji trygonometrycznych kątów α i $(2k\pi + \alpha)$, gdzie $k \in \mathbf{C}$, wyrażonych w mierze łukowej są sobie równe (funkcje tangens i cotangens muszą być określone dla danego kąta).

Funkcje trygonometryczne możemy traktować jako funkcje zmiennej $x \in \mathbf{R}$, będącej miarą kąta wyrażoną w radianach. Wówczas (w poniższych wzorach $k, n \in \mathbf{C}$):

dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$ zachodzi $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$,

$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$;

dla $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ zachodzi $\mathrm{tg}(x + k\pi) = \mathrm{tg}\, x$;

dla $x \neq n\pi$ zachodzi $\mathrm{ctg}(x + k\pi) = \mathrm{ctg}\, x$.

Sinus i cosinus są funkcjami okresowymi o okresie podstawowym 2π.
Tangens i cotangens są funkcjami okresowymi o okresie podstawowym π.

Tożsamości trygonometryczne są to związki zachodzące między wartościami funkcji trygonometrycznych dla wszystkich wartości zmiennej, dla których występujące funkcje są określone:

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ dla $x \in \mathbf{R}$,

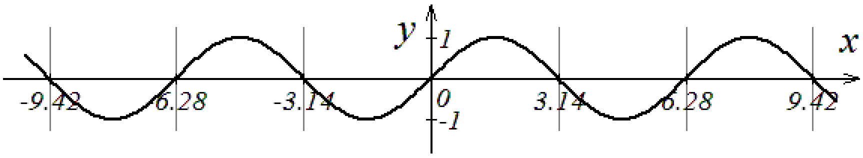
$\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{C}\}$,

$\mathrm{ctg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{C}\}$,

$\mathrm{ctg}\, x = \frac{1}{\mathrm{tg}\, x}$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbf{C}\}$.

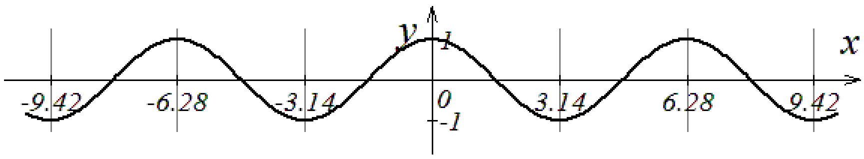
Wykresy funkcji trygonometrycznych.

Własności funkcji $y = \sin x$ (w poniższych wyrażeniach $k \in$ **C**):



- dziedzina: $x \in \mathbf{R}$; zbiór wartości $\langle -1, 1 \rangle$
- funkcja jest okresowa z okresem podstawowym 2π; jej wykres nazywamy sinusoidą
- wartość najmniejszą -1 przyjmuje dla $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$
- wartość największa 1 przyjmuje dla $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
- wartość 0 przyjmuje dla $x = k\pi$
- funkcja jest nieparzysta: $\sin(-x) = -\sin x$
- przyjmuje wartości dodatnie w przedziałach $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$
- przyjmuje wartości ujemne w przedziałach $(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$
- rośnie w przedziałach $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$
- maleje w przedziałach $\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \rangle$

Własności funkcji $y = \cos x$ (w poniższych wyrażeniach $k \in$ **C**):



- dziedzina: $x \in \mathbf{R}$; zbiór wartości $\langle -1, 1 \rangle$
- funkcja jest okresowa z okresem podstawowym 2π, jej wykres nazywamy cosinusoidą
- wartość najmniejszą -1 przyjmuje dla $x = \pi + 2k\pi$
- wartość największa 1 przyjmuje dla $x = 2k\pi$
- wartość 0 przyjmuje dla $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
- funkcja jest parzysta: $\cos(-x) = \cos x$
- przyjmuje wartości dodatnie w przedziałach $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$
- przyjmuje wartości ujemne w przedziałach $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$
- rośnie w przedziałach $\langle \pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi \rangle$
- maleje w przedziałach $\langle 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle$

Wykresy funkcji sinus i cosinus możemy przekształcać w następujący sposób:

- przesuwać o p jednostek wzdłuż osi *OX* oraz q jednostek wzdłuż osi *OY* :

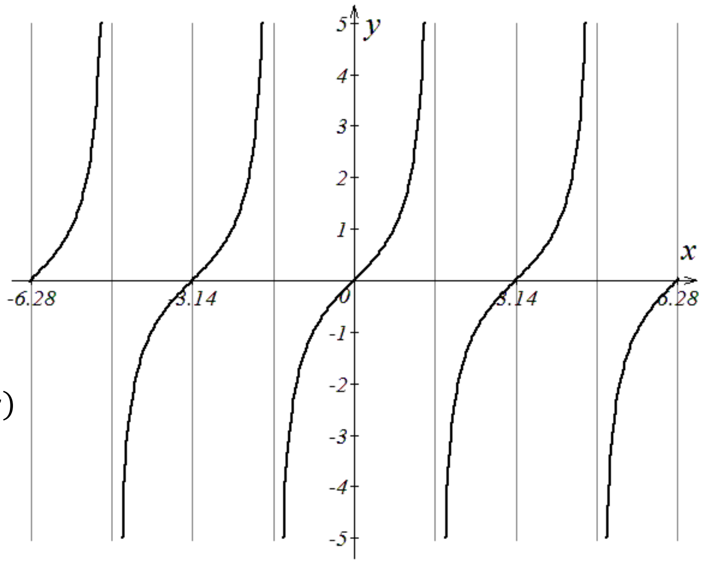
$$y = \sin(x - p) + q\ ,\ \ y = \cos(x - p) + q\ ;$$

- $y = a\sin(x)$, $y = a\cos(x)$, $a \neq 0$, liczbę $|a|$ nazywamy amplitudą funkcji.

Okres podstawowy funkcji: $y = \sin(bx)$ i $y = \cos(bx)$, gdzie $b > 0$, jest równy $\frac{2\pi}{b}$.

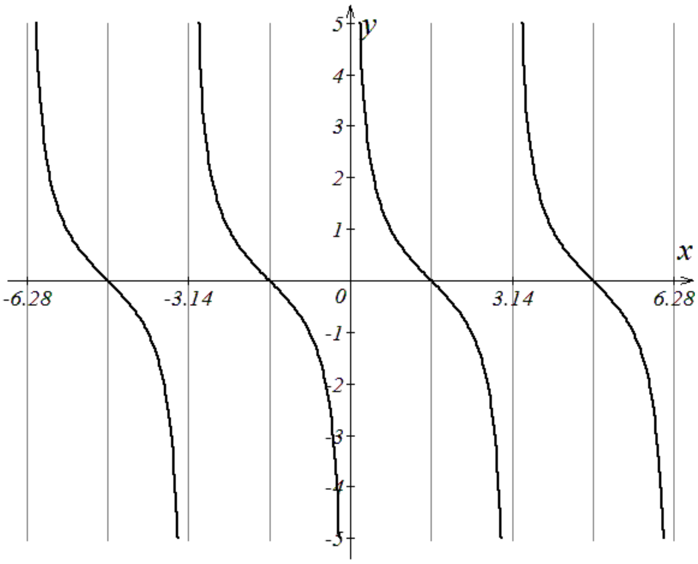
Własności funkcji $y = \operatorname{tg} x$ (w poniższych wyrażeniach $k \in$ **C**):

- dziedzina: $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{C}\}$
- zbiorem wartości jest **R**
- funkcja okresowa, okres podstawowy π
- wykres funkcji nazywamy tangensoidą
- wartość 0 przyjmuje dla $x = k\pi$
- rośnie w przedziałach $(-\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi)$
- dla $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ zachodzi $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x)$
- asymptoty pionowe przechodzą przez punkty $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$



Własności funkcji $y = \operatorname{ctg} x$ (w poniższych wyrażeniach $k \in$ **C**):

- dziedzina: $x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{C}\}$
- zbiorem wartości jest **R**
- funkcja okresowa, okres podstawowy π
- wykres funkcji nazywamy cotangensoidą
- wartość 0 przyjmuje dla $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
- maleje w przedziałach $(k\pi, \pi + k\pi)$
- dla $x \neq k\pi$ zachodzi $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg}(x)$
- asymptoty pionowe przechodzą przez punkty $x = k\pi$



Okres podstawowy funkcji: $y = \operatorname{tg}(bx)$ i $y = \operatorname{ctg}(bx)$, gdzie $b > 0$, jest równy $\frac{\pi}{b}$.

Dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ można obliczyć funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Dla dowolnego $\alpha \in \mathbf{R}$ można obliczyć funkcje trygonometryczne kąta podwojonego 2α.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}, \text{ dla } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbf{C}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}, \text{ dla } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbf{C}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}, \text{ dla } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbf{C}, \ 1 - \operatorname{tg}^2\alpha \neq 0$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}, \text{ dla } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}, \ k \in \mathbf{C}$$

Dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ można obliczyć sumę i różnicę funkcji trygonometrycznych.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Wzory redukcyjne pozwalają wyrazić wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta za pomocą wartości funkcji trygonometrycznych kąta należącego do przedziału $\langle 0, \frac{\pi}{2})$.

$$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

Równania trygonometryczne rozwiązujemy podstawiając za argument funkcji nową zmienną.

Przykład: rozwiąż równanie $\sin(2x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$.

Podstawiamy nową zmienną $a = 2x - \frac{\pi}{6}$ i otrzymujemy równanie $\sin a = \frac{1}{2}$.

Z tablic lub wykresu funkcji sinus odnajdujemy rozwiązanie:

$$a = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad a = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{, gdzie } k \in \mathbf{C}.$$

Wracamy do poprzedniej zmiennej

$$2x - \frac{\pi}{6} = a = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad 2x - \frac{\pi}{6} = a = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{, gdzie } k \in \mathbf{C}.$$

Obliczamy: $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{C}$.

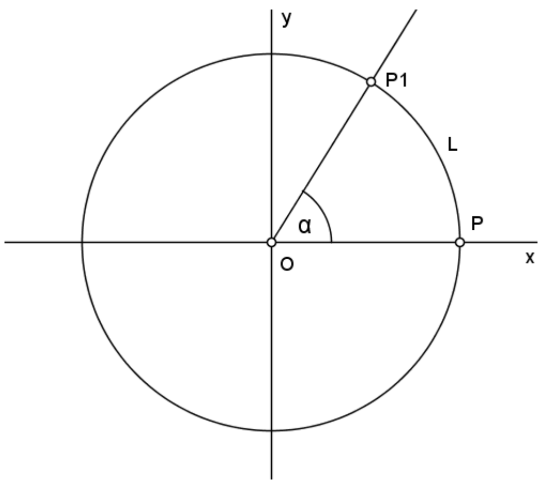
Ruch po okręgu.

Gdy analizujemy ruch ciała poruszającego się po okręgu, które przemieściło się z punktu P do punktu P1, możemy obliczyć wartość jego prędkości kątowej ω.

$$\omega = \frac{\text{kąt obrotu}}{\text{czas ruchu}} = \frac{\alpha}{t}$$

oraz wartość jego prędkość liniowej v wzdłuż łuku.

$$v = \frac{\text{długość łuku}}{\text{czas ruchu}} = \frac{L}{t}$$



Koniec darmowego fragmentu ☺

W dalszej części konspektu znajdują się:

- zadania spełniające aktualne wymagania maturalne
- klucze rozwiązań
- zakres materiału na następne zajęcia

Zapraszamy na kurs!

Szczegółowe informacje na temat naszego kursu przygotowawczego znajdują się na stronie: www.medicus.edu.pl

Zapisy są przyjmowane przez formularz zgłoszeniowy: www.medicus.edu.pl/zapisy