INSTITUT MEDICUS
Kurs przygotowawczy do matury
i rekrutacji na studia medyczne
Rok 2017/2018

www.medicus.edu.pl
tel. 501 38 39 55

MATEMATYKA 4

FUNKCJA KWADRATOWA

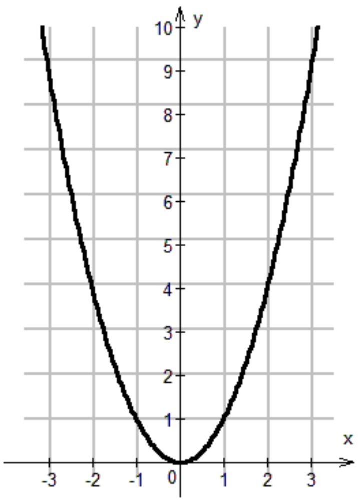
Funkcją kwadratową lub *trójmianem kwadratowym* nazywamy funkcję

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$. Dziedziną funkcji kwadratowej jest zbiór liczb rzeczywistych.
Wykres funkcji kwadratowej nazywamy *parabolą*.

Z wykresu funkcji kwadratowej $y = x^2$ (gdzie $a = 1, b = c = 0$) możemy odczytać, że:

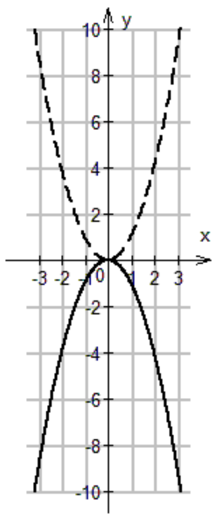
- punkt $(0,0)$ jest wierzchołkiem paraboli, której ramiona są skierowane do góry,
- oś $0Y$ jest osią symetrii paraboli,
- funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty, 0\rangle$ oraz jest rosnąca w przedziale $\langle 0, \infty)$,
- dla $x = 0$ funkcja przyjmuje wartość minimalną równą 0,
- dla każdego $x \neq 0$ zachodzi nierówność $f(x) > 0$.



Wykres funkcji $y=-x^2$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y=x^2$ względem osi $0X$.

Z wykresu funkcji kwadratowej $y=-x^2$ (gdzie $a=-1, b=c=0$) możemy odczytać, że:

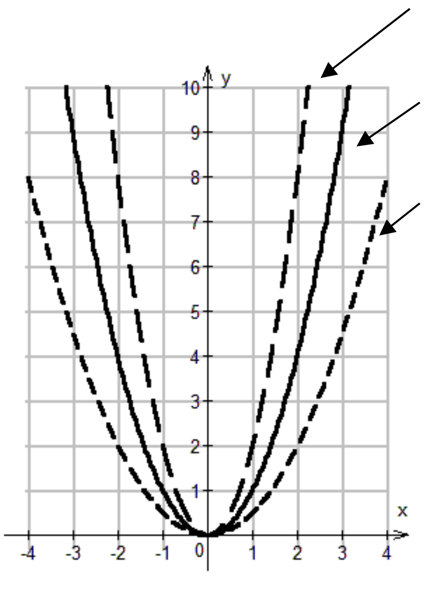
- punkt $(0,0)$ jest wierzchołkiem paraboli, której ramiona są skierowane w dół,
- oś $0Y$ jest osią symetrii paraboli,
- funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty,0\rangle$ oraz jest malejąca w przedziale $\langle 0,\infty)$,
- dla $x=0$ funkcja przyjmuje wartość maksymalną równą 0,
- dla każdego $x\neq 0$ zachodzi nierówność $f(x)<0$.



$y=f(x)=x^2$

$y=-f(x)=-x^2$

Od wartości współczynnika a funkcji $y=ax^2$ zależy, czy ramiona paraboli skierowane są do góry (gdy $a>0$), czy do dołu (gdy $a<0$) oraz jak bardzo są one rozchylone.



$y=2x^2$

$y=x^2$

$y=0{,}5x^2$

Przesuwając wykres funkcji $y = ax^2$ (gdzie $a \neq 0$, aby była to funkcja kwadratowa) o p jednostek w poziomie i q jednostek w pionie, czyli o wektor $[p, q]$, otrzymujemy wykres funkcji

$$y = a(x - p)^2 + q .$$

Powyższe równanie nazywamy *postacią kanoniczną* funkcji kwadratowej.

Postać kanoniczną funkcji kwadratowej można przekształcić do *postaci ogólnej* $y = ax^2 + bx + c$.

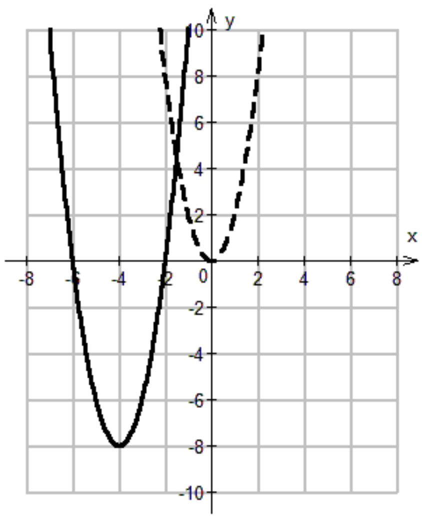
Przy przekształcaniu funkcji kwadratowej między postacią ogólną a postacią kanoniczną należy korzystać ze wzorów skróconego mnożenia (aby uniknąć kolizji oznaczeń, użyto zmiennych r i s)

$$(r - s)^2 = r^2 - 2rs + s^2 \quad \text{oraz} \quad (r + s)^2 = r^2 + 2rs + s^2 \ .$$

Parabola ma wierzchołek w punkcie o współrzędnych: $x_w = p = \dfrac{-b}{2a}$ oraz $y_w = q = \dfrac{-\Delta}{4a}$,

gdzie wyrażenie $\Delta = b^2 - 4ac$ nazywamy *wyróżnikiem* trójmianu kwadratowego.

Rysunek poniżej pokazuje wykres funkcji $y = 2x^2$ (linia przerywana) i wykres tej funkcji przesuniętej o wektor $[-4, -8]$ czyli parabolę opisaną równaniem $y = 2(x + 4)^2 - 8$ (linia ciągła).



Przekształcenie

$$y = 2(x + 4)^2 - 8 = 2\left(x^2 + 2x4 + 4^2\right) - 8 = 2x^2 + 16x + 24$$

prowadzi do funkcji zapisanej w postaci ogólnej, gdzie $a = 2, \ b = 16, \ c = 24$.

Wyróżnik trójmianu kwadratowego

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16^2 - 4 \cdot 2 \cdot 24 = 256 - 192 = 64 .$$

Przesunięta funkcja ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = -6, \ x_2 = -2$.

Rozwiązaniem (*pierwiastkami*) równania kwadratowego $ax^2+bx+c=0$ (gdzie $a\neq 0$) są miejsca zerowe funkcji kwadratowej $f(x)=ax^2+bx+c$. Wyznaczamy je po zbadaniu wartości wyróżnika:

- jeżeli $\Delta<0$, to brak jest pierwiastków równania,
- jeżeli $\Delta=0$, to równanie ma jeden pierwiastek $x_0=\frac{-b}{2a}$,
- jeżeli $\Delta>0$, to równanie ma dwa pierwiastki: $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Funkcję kwadratową można przedstawić w *postaci iloczynowej*

$$y=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right),\ \text{gdzie } a\neq 0.$$

Wyrazy $\left(x-x_1\right)$ oraz $\left(x-x_2\right)$nazywamy *czynnikami liniowymi*, a postać iloczynową nazywamy rozkładem na czynniki liniowe. Badamy wartość wyróżnika trójmianu kwadratowego:

- jeżeli $\Delta<0$, to trójmianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe,
- jeżeli $\Delta=0$, to trójmian można przedstawić w postaci $y=a\left(x-x_0\right)^2$, gdzie $x_0=\frac{-b}{2a}$,
- jeżeli $\Delta>0$, to trójmian można przedstawić w postaci $y=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$,

  gdzie $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ są pierwiastkami trójmianu.

Wyróżnik funkcji $f(x)=2x^2+16x+24$ (wykres przedstawiony na stronie 3) wynosi $\Delta=64$, rozwiązaniem równania kwadratowego $2x^2+16x+24=0$ są liczby

$$x_1=\frac{-16-\sqrt{64}}{2\cdot 2}=-6,\ x_2=\frac{-16+\sqrt{64}}{2\cdot 2}=-2.$$

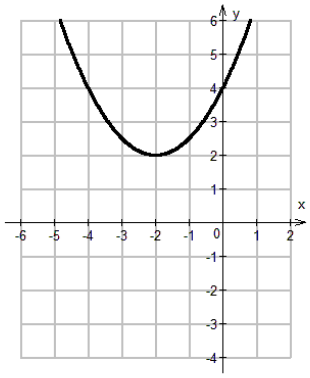
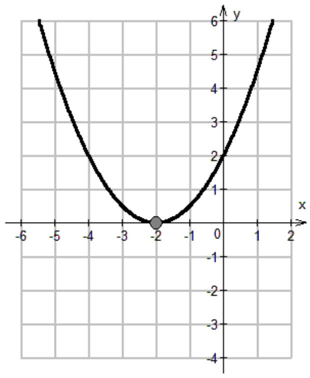
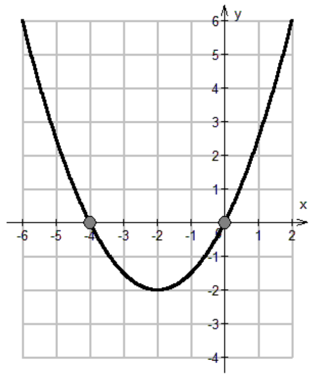
Przedstawmy tę funkcję w postaci iloczynowej:

$$y=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)=2\left(x+6\right)\left(x+2\right).$$

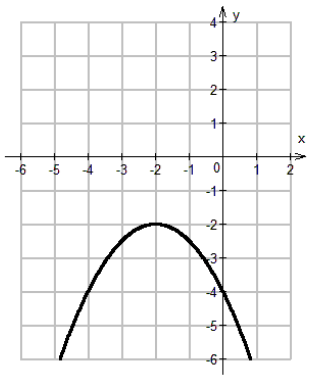
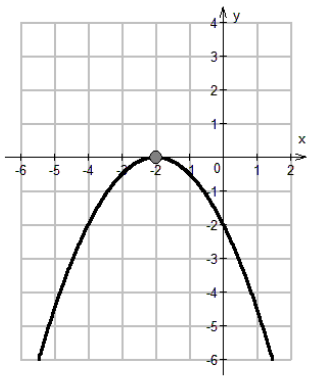
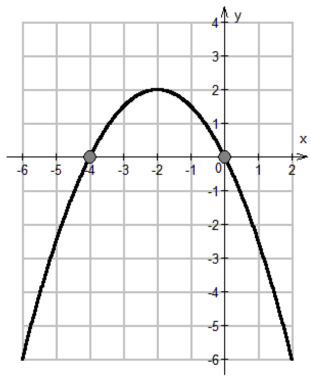
Aby przejść od postaci iloczynowej do postaci ogólnej funkcji kwadratowej, należy wykonać mnożenie $a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$ i uporządkować wyrazy w otrzymanym wyrażeniu.

Interpretacja geometryczna różnych położeń wykresu paraboli $y = ax^2 + bx + c$ względem osi OX:

$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

brak miejsc zerowych jedno miejsce zerowe dwa miejsca zerowe

Interpretacja geometryczna jest pomocna przy rozwiązywaniu układu równań, z których jedno opisuje funkcję liniową, a drugie funkcję kwadratową. Rozwiązanie takiego układu równań stanowią pary liczb (x, y) spełniające oba równania i opisujące punkty przecięcia wykresów obu funkcji.

Przykład

Szukamy rozwiązania układ równań $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x^2 + 3 \end{cases}$.

Łączymy oba równania $x + 1 = -x^2 + 3$.

Powstaje równanie kwadratowe $x^2 + x - 2 = 0$.

Obliczamy wyróżnik $\Delta = 1 - 4(-2) = 9$.

Wyróżnik $\Delta > 0$, więc równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki.

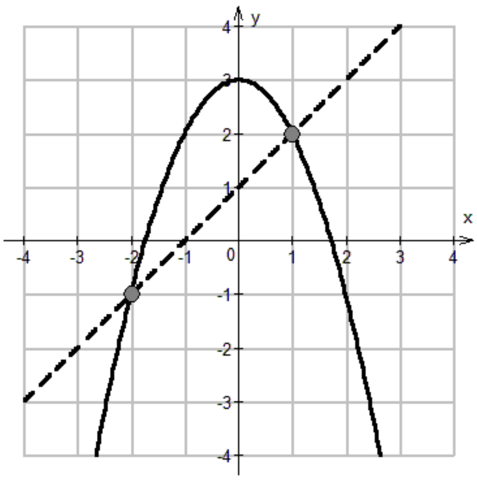
Obliczamy pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2} = \frac{-4}{2} = -2, \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Podstawiamy obliczone pierwiastki do równania liniowego:

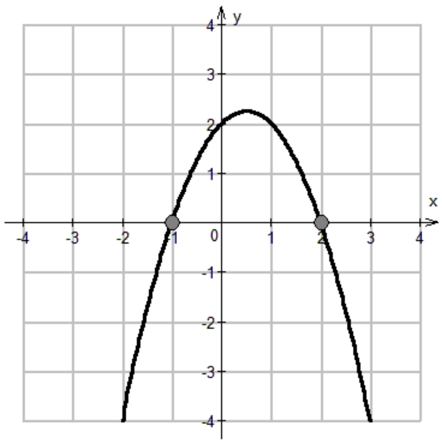
$$y_1 = x_1 + 1 = -1, \quad y_2 = x_2 + 1 = 2.$$

Wykreślimy parabolę i linię prostą. Wykresy tych funkcji przecinają się w punktach o współrzędnych: $(x_1, y_1) = (-2, -1)$ i $(x_2, y_2) = (1, 2)$.



Interpretacja graficzna jest pomocna w rozwiązywaniu nierówności kwadratowych. Rozwiązanie nierówności z niewiadomą polega na wyznaczeniu tych wartości niewiadomej (zbioru rozwiązań), dla których nierówność jest spełniona. Wiedząc jak są skierowane ramiona paraboli wykresu funkcji kwadratowej (w górę albo w dół) i znając jej miejsca zerowe, można wyznaczyć zbiór rozwiązań odpowiedniej nierówności kwadratowej.

<u>Przykład</u>



Rozwiązujemy nierówność $-x^2 + x + 2 \geq 0$.

Obliczamy wyróżnik $\Delta = 1 - 4(-1)2 = 9$.

Wyróżnik $\Delta > 0$, więc równanie ma dwa pierwiastki

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{9}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2, \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{9}}{-2} = \frac{2}{-2} = -1.$$

Czynnik $a < 0$, więc ramiona paraboli skierowane są w dół. Funkcja $y = -x^2 + x + 2$ jest nieujemna w przedziale $x \in \langle -1, 2 \rangle$ i taki też jest zbiór rozwiązań nierówności $-x^2 + x + 2 \geq 0$.

Przykład z fizyki

Na jaką wysokość wzniesie się kamyk rzucony pionowo w górę?

Prędkość początkowa kamyka v_0 = 10 m/s. Po jakim czasie kamyk spadnie na Ziemię?

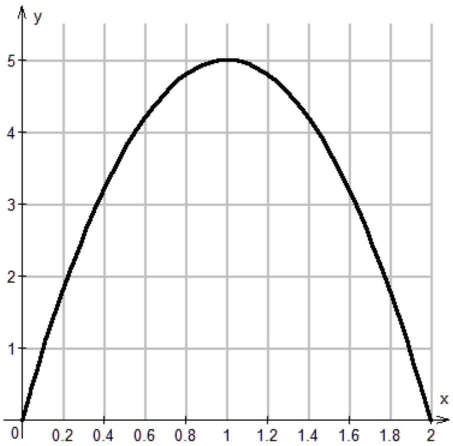
Wzór opisujący wysokość h w funkcji czasu t ma postać $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$,

gdzie $g = 10\frac{m}{s^2}$ oznacza przyspieszenie ziemskie.

Zapisujemy funkcję: $h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2} = 10\left[\frac{m}{s}\right]\cdot t - \frac{1}{2}\cdot 10\left[\frac{m}{s^2}\right]\cdot t^2 = -5\left[\frac{m}{s^2}\right]\cdot t^2 + 10\left[\frac{m}{s}\right]\cdot t$

Pierwiastkami równania $y = -5x^2 + 10x$ są $x_1 = 0$ i $x_2 = 2$.

Wierzchołek paraboli znajduje się w punkcie (1, 5).



Kamyk wzniesie się na wysokość 5 m (najwyższy punkt paraboli, osiągany po 1 s lotu) i spadnie po 2 sekundach (parabola przecina prostą $y = 0$ w $x_2 = 2$).

W celu <u>wyznaczenia najmniejszej lub największej wartości funkcji kwadratowej</u> $f(x) = ax^2 + bx + c$ w przedziale $\langle p_1, p_2\rangle$ należy obliczyć wartości funkcji na brzegach przedziału: $f(p_1)$ i $f(p_2)$.

Jeżeli współrzędna wierzchołka paraboli $x_w = -\frac{b}{2a}$ zawiera się w zadanym przedziale, $x_w \in \langle p_1, p_2\rangle$, to należy wyznaczyć również y_w (np. korzystając ze wzoru $y_w = \frac{-\Delta}{4a}$).

W przedziale $\langle p_1, p_2\rangle$:

- najmniejsza spośród wyznaczonych wartości jest najmniejszą wartością funkcji kwadratowej;
- największa spośród wyznaczonych wartości jest największą wartością funkcji kwadratowej.

Przykład

Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ w przedziale $\langle -1, 2 \rangle$.

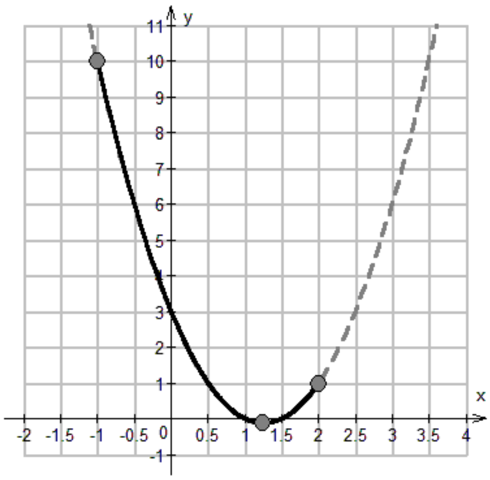
Obliczamy wartości funkcji na brzegach przedziału:

$f(-1) = 2(-1)^2 - 5(-1) + 3 = 2 + 5 + 3 = 10$ oraz $f(2) = 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 3 = 8 - 10 + 3 = 1$.

Obliczamy $x_w = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-5}{2 \cdot 2} = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$ i sprawdzamy, że $x_w \in \langle -1, 2 \rangle$,

następnie obliczamy $y_w = f\left(\dfrac{5}{4}\right) = 2 \cdot \left(\dfrac{5}{4}\right)^2 - 5 \cdot \dfrac{5}{4} + 3 = -\dfrac{1}{8} = -0{,}125$.

Wyznaczone zostały wartości $\{-0{,}125\,, 1\,, 10\}$, z których najmniejszą jest $-0{,}125$, a największą jest 10. Możemy to zobrazować na wykresie funkcji.



Zakres rozszerzony.

Jeżeli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma dwa pierwiastki: x_1, x_2, to można wyrazić ich sumę i iloczyn za pomocą *wzorów Viete'a* :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Koniec darmowego fragmentu ☺

INSTYTUT MEDICUS

W dalszej części konspektu znajdują się:

- zadania spełniające aktualne wymagania maturalne
- klucze rozwiązań
- zakres materiału na następne zajęcia

Zapraszamy na kurs!

Szczegółowe informacje na temat naszego kursu przygotowawczego znajdują się na stronie: www.medicus.edu.pl

Zapisy są przyjmowane przez formularz zgłoszeniowy:
www.medicus.edu.pl/zapisy